Correction Devoir maison n°1

Exercice 1

Soit g la fonction définie par $g : x \to \ln(1+x^2)$.

1. Pour déterminer son ensemble de définition, on résout l'inéquation

$$1 + x^2 > 0 \iff x \in \mathbb{R}$$

Donc le domaine de définition de la fonction g est $\boxed{D_g = \mathbb{R}}$. On a également pour tout x réel :

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\iff x^2 + 1 \geq 1 \\ &\iff \ln(x^2+1) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R}.}$$

2. On calcule les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. On remarque que

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x^2) = \lim_{x\to-\infty}(1+x^2) = +\infty.$$

On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty}$$

et de même

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty}$$

3. On remarque que R est un ensemble symétrique (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.) Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} g(-x) &= \ln(1+(-x)^2) \\ &= \ln(1+x^2) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est paire.}}$

4. La fonction g est dérivable en tant que composée de fonction dérivable. On calcule alors sa dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Pour tout x réel, $1 + x^2 > 0$. Le tableau de variations s'en déduit simplement

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation

$$\begin{aligned} g(x) = y & \Leftrightarrow \ln(1+x^2) = y \\ & \Leftrightarrow 1 + x^2 = e^y \\ & \Leftrightarrow x^2 = e^y - 1 \end{aligned}$$

Cas n°1 : Si $y > 0$ alors $e^y - 1 > 0$. Dans ce cas, l'équation a deux solutions

$$g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{e^y - 1} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{e^y - 1}$$

$\boxed{\text{Les solutions sont } \mathcal{S} = \left\{-\sqrt{e^y-1}, \sqrt{e^y-1}\right\}}$

Cas n°2 : Si $y = 0$ alors l'équation $g(x) = y$ n'a qu'une $\boxed{\text{unique solution } x = 0}$.

Cas n°3 : Si $y < 0$ alors $e^y - 1 < 0$. $\boxed{\text{L'équation } g(x) = y \text{ n'a aucune solution}}$.

6. On pose la fonction h définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = g(x) - x = \ln(1+x^2) - x$. On étudie la fonction h et pour cela, on calcule sa dérivée

$$\begin{aligned} h'(x) = g'(x) - 1 &= \frac{2x}{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{-1 + 2x - x^2}{1+x^2} \\ &= -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0 \end{aligned}$$

La fonction h est décroissante et $h(0) = 0$. On en déduit le tableau de signe de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	

Deux cas sont possibles.

1° Cas : Si $x < 0$ alors $g(x) - x > 0$ et donc

$\boxed{\text{la courbe représentant la fonction } g \text{ est au-dessus de la droite d'équation } y = x.}$

2° Cas : Si $x \geq 0$ alors $g(x) - x \leq 0$ et donc

$\boxed{\text{la courbe représentant la fonction } g \text{ est en dessous de la droite d'équation } y = x.}$

7. La courbe de la fonction g est donnée ici :

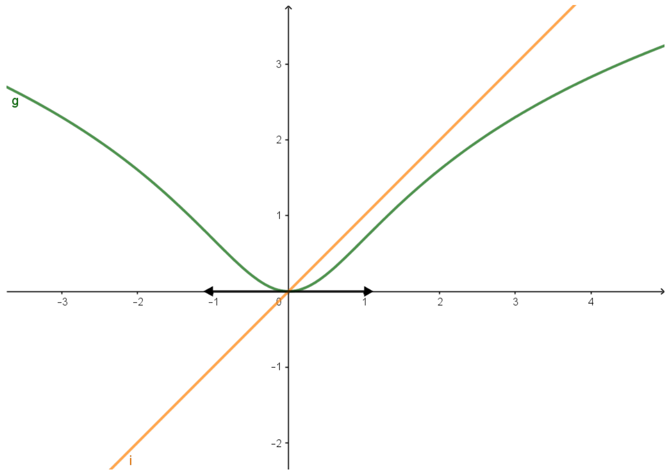

Figure 1 – La fonction g et la droite $y = x$.

Exercice 2 - Ecricome ECT 2015 (Exercice 2)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

1. Tout d'abord, on rappelle que le domaine de la fonction ln est $\mathbb{R}_+^*$. Donc $x > 0$ et on résout

$$\ln(x) = 0 \iff x = 1$$

On en déduit que $\boxed{\text{le domaine de définition est } D =]0,1[\cup]1,+\infty[.}$

2. On calcule les limites

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0}$,

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \ln(x) = 0^- \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty}$, et

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln(x) = 0^+ \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty}$.

3. La fonction f est dérivable sur D en tant que quotient de fonctions dérivables. Pour $x \in D$, on a

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Ainsi, $\forall x \in D$, $(\ln(x))^2 > 0$ et

$$\ln(x) - 1 > 0 \iff x > e$$

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
Variation de f	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

4. Pour $x \in D$, on résout l'équation

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \frac{x}{\ln(x)}=x \\ &\iff \frac{1}{\ln(x)}=1 \qquad (\text{car } x\neq 0) \\ &\iff \ln(x)=1 \qquad (\text{car } \ln(x)\neq 0) \\ &\iff x=e \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La solution de l'équation } f(x)=x \text{ est } \mathcal{S}=\{e\}.}$

5. Pour tout $x \in [e;+\infty[$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln(x)}\right)^2 &= \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{\ln(x)}+\frac{4}{(\ln(x))^2}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}. \end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$\boxed{\forall x \in [e;+\infty[, \quad f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln(x)}\right)^2.}$$

6. Pour $x \in [e;+\infty[$, on a $f'(x)>0$ (d'après question 3.). Ainsi,

$$|f'(x)|=f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln(x)}\right)^2$$

Comme $\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln(x)}\right)^2>0$, on a

$$|f'(x)|<\frac{1}{4}.$$

Exercice 3 - Ecricome ECT 2004

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$$

Partie 1 : Étude d'une fonction g intermédiaire

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t\geq 0, \quad g(t)=\frac{t}{t+1}-\ln(1+t)$$

1. On résout l'équation (le dénominateur ne doit pas s'annuler)

$$t+1=0 \iff t=-1$$

et l'inéquation (le domaine de ln est $\mathbb{R}_+^*$)

$$t+1>0 \iff t>-1$$

Ainsi, $\boxed{\text{le domaine de définition de } g \text{ est } D=]-1;+\infty[.}$

2. La fonction g est dérivable en tant que somme, composée et quotient de fonctions dérivables. Ainsi, pour $x \in D$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{t+1-t}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} \\ &= \frac{1-(1+t)}{(1+t)^2} \\ &= -\frac{t}{(1+t)^2} < 0 \end{aligned}$$

3. $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est décroissante}}$ et on a le tableau de variation suivant

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(t)$	$-$
Variation de g	$0 \searrow -\infty$
Signe de $g(t)$	$-$

On a donc, $\boxed{\forall t > 0, \quad g(t) \leq 0.}$

Partie 2 : Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et produit de fonctions dérivables. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x} \\ &= e^{-x}\left(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)\right) \\ &= e^{-x}g(e^x) \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}g(e^x).}$

2. Pour tout x réel, on a $e^x > 0$ et g est négative sur $[0; +\infty[$. Ainsi, $g(e^x) < 0$ et $e^{-x} > 0$ donc pour tout x réel, $f'(x) \leq 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

3. Soit x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. Comme f est décroissante, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\implies f(0) \geq f(x) \geq f(1) \\ &\implies 1 \times \ln(2) \geq f(x) \geq \frac{\ln(1+e)}{e} \\ &\implies 0.7 \geq \ln(2) \geq f(x) \geq \frac{\ln(1+e)}{e} \geq 0.4 \\ &\implies \boxed{1 \geq f(x) \geq 0} \end{aligned}$$

4. Pour tout x de $[0,1]$:
$$|f'(x)| = |e^{-x}g(e^x)| = |e^{-x}||g(e^x)|.$$
On a alors
$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\iff 1 \geq e^{-x} \geq \frac{1}{e} \\ &\implies |e^{-x}| \leq 1 \end{aligned}$$
De même,
$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\iff 1 \leq e^x \leq e \\ &\iff g(1) \leq g(e^x) \leq g(e) \qquad \text{(La fonction } g \text{ est croissante)} \\ &\implies |g(e^x)| \leq |g(e)| \end{aligned}$$
En utilisant ces deux inégalités, on a $\forall x \in [0,1]$,
$$\boxed{|f'(x)| \leq |g(e)|.}$$

Partie 3 : Étude de la fonction $f(x) - x$

On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

1. La fonction h est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $h'(x) = f'(x) - 1$. Or, $f'(x) \leq 0$ et $-1 < 0$ donc
$$h'(x) \leq 0.$$
$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est donc décroissante sur } [0,1].}$$
2. — La fonction h est continue (car dérivable (Partie 3.1)).
   — La fonction h est strictement décroissante.
   — On a d'une part $h(0) = f(0) - 0 = \ln(2) \simeq 0,69$ et d'autre part $h(1) = f(1) - 1 \simeq -0,52$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaire,
$$\boxed{\text{l'équation } h(x) = 0 \text{ a une unique solution } \alpha \text{ dans l'intervalle } [0,1].}$$
3. On a alors $h(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$. Il y a donc au moins une solution dans $[0,1]$ a l'équation $f(x) = x$. Réciproquement, supposons qu'il existe une autre solution $\beta \neq \alpha$ à l'équation $f(x) = x$ alors $f(\beta) = \beta \iff h(\beta) = 0$. Or l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution. Donc il est absurde de supposer qu'il y en ait une autre.
$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet donc une unique solution sur } [0,1].}$$